Παρασκευή 11/12/20

Άσκηση 1:

Έστω $X_1, \dots X_n$ τυχαίο δείγμα από κατανομή Bernoulli $(1,\theta)$ με εκ των προτέρων κατανομή $U(0,1)$. Να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes της θ όταν $L(\theta,d) = (d-\theta)^2/\theta(1-\theta)$ και να εξεταστεί πότε είναι minimax

Εφόσον $X_1, \dots X_n \sim$ Bernoulli $(1,\theta)$ τότε
$f(x_i|\theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}$

το Π.Ο της εκ των προτέρων δεν εξαρτάται από την θ
$p(\theta) = 1, \quad 0<\theta<1$

$$p(\theta|x) = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}, \quad 0<\theta<1$$

δηλ. $\theta|X \sim \text{Βήτα}\left(\sum x_i + 1, n - \sum x_i + 1\right)$.

Ο εκτιμητής Bayes θα προκύψει από την ελαχιστοποίηση
$\min E_{\theta|x} L(\theta,d)$

$$E_{\theta|x}(L(\theta,d)) = \int \frac{(d-\theta)^2}{\theta(1-\theta)} p(\theta|x)\, d\theta$$

Παραγωγίζω ως προς θ και εξισώνω με το 0 και έχουμε

$$2\int \frac{d-\theta}{\theta(1-\theta)} p(\theta|x)\, d\theta = 0 \Rightarrow d\int \frac{1}{\theta(1-\theta)} p(\theta|x)\, d\theta = \int \frac{\theta}{\theta(1-\theta)} p(\theta|x)\, d\theta$$

$$\Rightarrow d \cdot E_{\theta|x}\left(\frac{1}{\theta(1-\theta)}\right) = E_{\theta|x}\left(\frac{\cancel{\theta}}{\cancel{\theta}(1-\theta)}\right) \quad (1)$$

$$E_{\theta|x}\left(\frac{1}{1-\theta}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1-\theta} \frac{\theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i}}{\text{Βήτα}(\sum x_i + 1, n - \sum x_i + 1)}\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \frac{\theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i-1}}{B\eta\tau\alpha(\Sigma x_i+1, n-\Sigma x_i+1)} d\theta =$$

$$= \frac{B(\Sigma x_i+1, n-\Sigma x_i)}{B(\Sigma x_i+1, n-\Sigma x_i+1)} \underbrace{\int_0^1 \frac{\theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i-1}}{B\eta\tau\alpha(\Sigma x_i+1, n-\Sigma x_i)} d\theta}_{=1}$$

$$= \frac{B\eta\tau\alpha(\Sigma x_i+1, n-\Sigma x_i)}{B\eta\tau\alpha(\Sigma x_i+1, n-\Sigma x_i+1)} \quad (2)$$

$$E_{\theta|x}\left(\frac{1}{\theta(1-\theta)}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\theta(1-\theta)} p(\theta|x) d\theta =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\theta(1-\theta)} \frac{\theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i}}{B\eta\tau\alpha(\Sigma x_i+1, n-\Sigma x_i+1)} d\theta$$

$$= \int_0^1 \frac{\theta^{\Sigma x_i-1}(1-\theta)^{n-\Sigma x_i-1}}{B\eta\tau\alpha(\Sigma x_i+1, n-\Sigma x_i+1)} d\theta =$$

$$= \frac{B\eta\tau\alpha(\Sigma x_i, n-\Sigma x_i)}{B\eta\tau\alpha(\Sigma x_i+1, n-\Sigma x_i+1)} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (2) και (3) στην (1) έχουμε ότι

$$d^* = \frac{B\eta\tau\alpha(\Sigma x_i+1, n-\Sigma x_i)}{B\eta\tau\alpha(\Sigma x_i, n-\Sigma x_i)}$$

$$B\eta\tau\alpha(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad \Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k-1).$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

Επομένως $d^* = \frac{1}{n}\Sigma x_i$ εκτιμητής Bayes.

Για να είναι minmax θα πρέπει $R(\theta,d^*)$ να είναι σταθερή ως προς θ.

$$R(\theta,d^*) = EL(\theta,d^*) = E_{X|\theta}\left(\frac{(d^*-\theta)^2}{\theta(1-\theta)}\right) = \frac{1}{\theta(1-\theta)} E_{X|\theta}\left(\frac{1}{n}\sum X_i-\theta\right)^2$$

$$= \frac{1}{\theta(1-\theta)}\left[Var\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) + \left[E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right)-\theta\right]^2\right]$$

$$= \frac{1}{\theta(1-\theta)}\left[\frac{n}{n^2}Var(X_i) + \left(\frac{1}{n} n EX_i - \theta\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\theta(1-\theta)} \frac{\theta(1-\theta)}{n} = \frac{1}{n}$$ δεν εξαρτάται από το θ άρα minmax

Άσκηση 2: Προσοχή έχω μια μεταβλητή.

Έστω $X \sim Binomial(n,\theta)$ με εκ των προτέρων κατανομή την $U(0,1)$. Να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes της θ όταν $L(\theta,d) = (d-\theta)^2$ και να εξεταστεί πότε είναι minmax και να υπολογίσετε την Bayes συνάρτηση κινδύνου.

$X \sim Binomial(n,\theta) \Rightarrow f(x|\theta) \propto \theta^x(1-\theta)^{n-x}$, $x=0,1,\dots n$.

Το ΠΟ της εκ των προτέρων δεν εξαρτάται από το θ.

άρα $p(\theta)=1$, $0<\theta<1$

$\theta|X \sim Beta(x+1, n-x+1)$

$$d^* = E_{\theta|X}\theta = \frac{x+1}{x+1+n-x+1} = \frac{x+1}{n+2}$$

Για να είναι minmax θα πρέπει η $R(\theta, d^*)$ να είναι σταθερή ως προς θ.

$$R(\theta, d^*) = E_{X|\theta} L(\theta, d^*) = E_{X|\theta}\left\{\left(\frac{x+1}{n+2} - \theta\right)^2\right\} =$$

Ιδιότητα τετρ. σφάλμ.

$$= Var\left(\frac{x+1}{n+2}\right) + \left[E\left(\frac{x+1}{n+2}\right) - \theta\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2} Var(X) + \left(\frac{EX+1}{n+2} - \theta\right)^2 = \frac{n\theta - n\theta^2}{(n+2)^2} + \frac{(1+2\theta)^2}{(n+2)^2} =$$

$$= \frac{n\theta - n\theta^2 + 1 + 4\theta + 4\theta^2}{(n+2)^2} \text{ είναι}$$

minmax για $\boxed{n=4.}$

Για την συνάρτηση κινδύνου

$$R(p, d^*) = E_\theta R(\theta, d^*) = E_\theta\left\{\frac{(4-n)\theta^2 + (n-4)\theta + 1}{(n+2)^2}\right\}$$

$$= \frac{(4-n)E_\theta(\theta^2) + (n-4)E(\theta) + 1}{(n+2)^2}$$

$$E\theta^2 = \int_0^1 \theta^2 p(\theta) d\theta = \left.\frac{\theta^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$E\theta = \frac{1}{2}.$$

Άρα $R(p, d^*) = \frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{4-n}{3} + \frac{n-4}{2} + 1\right)$

(5ος) Άσκηση 3:

Έστω $X_1, \dots X_n \sim P(\theta)$ με εκ των προτέρων $p(\theta) = e^{-\theta}, \theta \geq 0$

Να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes για τις πιθανότητες $P_{X|\theta}(X=k)$.

$$f(X|\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, \quad x = 1,2 \dots \quad p(\theta) = e^{-\theta}, \ \theta \geq 0$$

Εμείς θέλουμε τον εκτιμητή Bayes για τις πιθανότητες

$$P_{X|\theta}(X=k) = \frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!} = g(\theta).$$

Για την εκ των υστέρων έχουμε

$$p(\theta|x) \propto e^{-\theta}\theta^{\Sigma x_i} e^{-n\theta} = \theta^{\Sigma x_i} e^{-(n+1)\theta}, \ \theta \geq 0$$

Δηλ. $\theta|x \sim \text{Γάμμα}\left(\Sigma x_i + 1, \frac{1}{n+1}\right)$

Επομένως.

$$d^* = E_{\theta|x}\left(\frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!} \frac{\theta^{\Sigma x_i} e^{-(n+1)\theta}}{\Gamma(\Sigma x_i + 1)\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\Sigma x_i + 1}} d\theta$$

$$= \frac{(n+1)^{\Sigma x_i + 1}}{\Gamma(\Sigma x_i + 1) k!} \int_0^{\infty} \theta^{\Sigma x_i + k + 1 - 1} e^{-(n+2)\theta} d\theta$$

$$= \frac{(n+1)^{\Sigma x_i + 1}}{\Gamma(\Sigma x_i + 1) k!} \frac{\Gamma(\Sigma x_i + k + 1)}{(n+2)^{\Sigma x_i + k + 1}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\theta^{\Sigma x_i + k + 1 - 1} e^{-(n+2)\theta}}{\left(\frac{1}{n+2}\right)^{\Sigma x_i + k + 1} \Gamma(\Sigma x_i + k + 1)} d\theta}_{=1}$$

Άρα $$d^* = \frac{(n+1)^{\Sigma x_i + 1}}{(n+2)^{\Sigma x_i + k + 1}} \frac{\Gamma(\Sigma x_i + k + 1)}{\Gamma(\Sigma x_i + 1) k!}$$

Θα μπορούσε να λυθεί και με την ροπογεννήτρια